รวมจุดผิดใน Hi-Speed Math 1–2

ต้นฉบับที่ตีพิมพ์โดย Science Center ตั้งแต่ปี 2563 เป็นต้นไป

อัปเดตล่าสุด – 27 มิถุนายน 2563

ไฟล์นี้รวบรวมหน้าที่มีการแก้ไขจุดผิดทั้งหมด
โดยตีกรอบ "จุดที่แก้ไขแล้ว" ด้วยสีแดง และ "จุดที่ปรับปรุงวิธีคิด" ด้วยสีเขียว

คุณผู้อ่านสามารถ print ไปใช้งานแทนหน้าเดิมจากหนังสือได้เลยครับ
- ถ้าต้องการเฉพาะหน้าหนังสือ (ไม่มีกรอบสี) ให้สั่งพิมพ์แบบ document only
- ถ้าต้องการให้มีกรอบสีแดง-เขียวด้วย ให้สั่งพิมพ์แบบ document and markup

ขอบคุณทุกท่านที่ช่วยอุดหนุน ช่วยแจ้งจุดผิด และติดตามผลงานของผมเสมอมานะครับ

เล่ม 1

หน้า 102 ข้อ 11. ตัวเลือก 3. แก้วิธีคิดทั้งหมดเป็น $(a-c)^2+(b-d)^2 \geqslant 0 \;\Rightarrow\; 2-2(ac+bd) \geqslant 0$

เล่ม 2

หน้า 98 ข้อ 24. บรรทัดที่ 4 แก้จาก 135° เป็น 225°
หน้า 105 ข้อ 68. 69. **ปรับปรุงวิธีคิด** (ดูได้จากหน้าเต็มในไฟล์นี้)

(9) จาก $3(a^2+b^2) = 10ab$

จะได้ $3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0$

$\rightarrow (3a-b)(a-3b) = 0$

$\therefore$ $3a = b$ หรือ $3b = a$

แต่โจทย์บอกว่า $a < b$ เท่านั้น จึงได้ $3a = b$

$\rightarrow (\frac{a+b}{a-b})^3 = (\frac{a+3a}{a-3a})^3 = (\frac{4a}{-2a})^3 = \underline{-8}$

---

(10) ข้อ 1. ผิด ถ้า $z = 0$ จะได้ $xz = yz$

ข้อ 2. ผิด ถ้า n ติดลบ

เช่น $x = 3,\ y = 4,\ n = -1$

จะได้ว่า $3 < 4$ แต่ $2^{-1} > 3^{-1}$

ข้อ 3. ..ส่วนกลางคือ

$$\frac{(x^2+2xy+y^2)+(x^2-2xy+y^2)}{2} = x^2+y^2$$

ส่วนขวาคือ $(x^2+2xy+y^2) - 2xy = x^2+y^2$

$\therefore$ กลาง = ขวา เสมอ

..พิจารณา ซ้ายกับกลาง บ้าง

จาก $(x-y)^2 \geqslant 0$ เสมอ

จะได้ $x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0$

..นั่นคือ $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ เสมอ

ดังนั้น กลาง $\geqslant$ ซ้าย เสมอ <u>ข้อ 3. จึงถูก</u>

ข้อ 4. $-2 < x-1 < 2 \quad \rightarrow -1 < x < 3$

$\therefore$ $\frac{1}{2} < 2^x < 2^3$ เสมอ

..แต่ $2^3 - \frac{1}{2^3}$ น้อยลงกว่า 2^3

จึงอาจทำให้ประโยคเป็นเท็จได้ ดังนั้น ข้อ 4. ผิด

---

(11) <u>ข้อ 1. ผิด</u>

เช่น $a = 1,\ b = 2$ จะได้ $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2.5$

ข้อ 2. ถูก เพราะ $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} = \frac{a^3+b^3}{a^2b^2}$

$= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2b^2}$ .....(1)

และ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ .....(2)

$\therefore$ สมการ (2) $\times \frac{(a^2-ab+b^2)}{ab}$ = สมการ (1)

ซึ่ง $\frac{a^2-ab+b^2}{ab} = \frac{a}{b} - 1 + \frac{b}{a}$ ย่อมมากกว่า 1 เสมอ

$\therefore$ สมการ (1) > สมการ (2)

ข้อ 3. ถูก เพราะ $(a-c)^2 + (b-d)^2 \geqslant 0$ เสมอ

$\Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 \geqslant 0$

$\Rightarrow (a^2+b^2) + (c^2+d^2) - 2(ac+bd) \geqslant 0$

แทนค่าได้เป็น $2 - 2(ac+bd) \geqslant 0$

$\therefore ac + bd \leqslant 1$ เสมอ

ข้อ 4. ถูก

---

(12) ข้อ 1. ผิด

มีเอกลักษณ์ และทุกตัวมีอินเวอร์สการบวกด้วย

ข้อ 2. ผิด

มีเอกลักษณ์ แต่ว่า 0 ไม่มีอินเวอร์สการคูณ

ข้อ 3. ถ้าให้ e เป็นเอกลักษณ์

จะได้ว่า $a * e = 2^a 2^e = 2^{a+e} = a$

สมมติ $a = 1$ จะได้ $2^{1+e} = 1 \quad \rightarrow e = -1$

สมมติ $a = 4$ จะได้ $2^{4+e} = 4 \quad \rightarrow e = -2$

พบว่าค่า e ไม่ได้เป็นค่าเดียวกัน

แสดงว่าไม่มีเอกลักษณ์ <u>ข้อ 3. ถูก</u>

ข้อ 4. ผิด เพราะจำนวนตรรกยะ บวกกับจำนวนอตรรกยะ ย่อมได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนอตรรกยะเสมอ

---

(13) <u>ข้อ ก. จริง</u> เพราะถ้า m, n เป็นจำนวนเต็ม

ย่อมได้ว่า $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

และ $m+n$ ก็เป็นจำนวนเต็มเสมอ

ข้อ ข. ไม่จริง เพราะถ้า $a = 0$ จะทำให้ $ab = 0$

ซึ่งไม่ใช่จำนวนอตรรกยะ

<u>ข้อ ค. จริง</u> ถ้าให้ e เป็นเอกลักษณ์ จะได้

$x * e = x \quad \rightarrow -xe = x$

$\rightarrow e = -1$ (เพราะ $x \neq 0$ แน่นอน)

และก็ได้ผลเช่นเดียวกันกับสมการ $e * x = x$

แสดงว่าเอกลักษณ์คือ -1 จริงๆ

ข้อ ง. ไม่จริง เพราะ $x \Delta y \neq y \Delta x$

---

(14) ข้อ 1.

จาก $(2*3)*4 = (2+3-8)+4-8 = -7$

และ $2*(3*4) = 2+(3+4-8)-8 = -7$

ดังนั้น ข้อ 1. ผิด

ข้อ 2. ให้ $a * e = a + e - 8 = a$ ..จะได้ $e = 8$

ดังนั้น <u>ข้อ 2. ถูก</u>

แทน $b = 0$ ในสมการ (1)

จะได้ $a^2 = a \rightarrow (a)(a-1) = 0$

$\therefore a = 0$ หรือ 1

แทน $a = -\frac{1}{2}$ ในสมการ (1)

จะได้ $\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2} \rightarrow b^2 = \frac{3}{4} \rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้นค่า z ทั้งหมดที่สอดคล้องเงื่อนไข ได้แก่

$(0,0)$, $(1,0)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\therefore$ ข้อ 2. ไม่จริง

ข้อ 3. จาก $z^3 = -1 = 1\angle 180^\circ$

..จะได้ $z = 1\angle 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

หรือ $z = 1\angle(60^\circ + 120^\circ) = 1\angle 180^\circ = -1$

หรือ $z = 1\angle(60^\circ + 240^\circ) = 1\angle 300^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

..ดังนั้น ข้อ 3. จริง

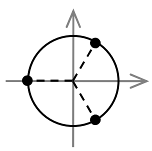
ข้อ 4. จริง ..เซต B มีคุณสมบัติครบทั้ง 4 อย่าง
- มีสมบัติปิด เพราะสมาชิกตัวใดก็ตามคูณกัน แล้วผลลัพธ์จะยังคงอยู่ในเซตนี้เสมอ
- เปลี่ยนกลุ่มการคูณได้ เพราะเป็นสับเซตของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งมีสมบัติเปลี่ยนกลุ่มการคูณ
- เอกลักษณ์การคูณคือ 1 อยู่ในเซตนี้
- อินเวอร์สการคูณของแต่ละสมาชิกก็อยู่ในเซตนี้

---

(23) เราทราบว่า $(-1)^3 = -1$

..แสดงว่ารากที่ 3 รากหนึ่งของ -1 คือ -1

ส่วนอีก 2 คำตอบหาได้จากการแบ่งวงกลมที่มี $(-1, 0)$ เป็นคำตอบออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆ กัน



..ดังนั้นอีก 2 คำตอบคือ $1\angle 60^\circ$ และ $1\angle(-60^\circ)$

นั่นคือ $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ กับ $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ตอบ ข้อ 1.

---

(24) เนื่องจาก $i = 1(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$

ดังนั้น รากที่สองของ i

คือ $\sqrt{1}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

และ $\sqrt{1}(\cos \boxed{225^\circ} + i\sin \boxed{225^\circ}) = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

ตอบ ข้อ 1.

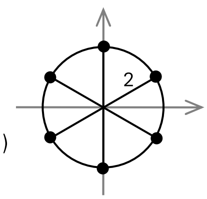
---

(25) เนื่องจาก $-64 = 64\angle 180^\circ$

ดังนั้น รากที่หกของ -64 รากหนึ่ง

คือ $\sqrt[6]{64}\angle(180^\circ/6) = 2\angle 30^\circ$

และมีรากทั้งหมดเป็นดังรูป (วงกลมมีรัศมี 2 หน่วย และอยู่ห่างกันจุดละ $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$)



..คำตอบได้แก่ $\pm 2i$, $\pm\sqrt{3} \pm i$ ตอบ ข้อ 4.

---

(26) จากโจทย์ $z^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = 1\angle 45^\circ$

แสดงว่า z ได้แก่ $\sqrt[3]{1}\angle(45^\circ/3) = 1\angle 15^\circ$ (Q_1)

หรือ $1\angle(15^\circ + 120^\circ) = 1\angle 135^\circ$ (Q_2)

หรือ $1\angle(15^\circ + 240^\circ) = 1\angle 255^\circ$ (Q_3)

..และจะได้ ค่าของ $4\alpha^4 - \beta^4 + 2\gamma^4$

$= 4\angle(15^\circ \times 4) - 1\angle(135^\circ \times 4) + 2\angle(255^\circ \times 4)$

$= 4\angle 60^\circ - 1\angle 540^\circ + 2\angle 1020^\circ$

$= 4\angle 60^\circ - 1\angle 180^\circ + 2\angle 300^\circ$

$= (2 + 2\sqrt{3}i) - (-1) + (1 - \sqrt{3}i) = 4 + \sqrt{3}i$ ตอบ

---

(27) จาก $z^3 = \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}\angle 0}{\sqrt{2}\angle 315^\circ} = 1\angle(-315^\circ)$

จะได้ $z = 1\angle(-105^\circ) \leftarrow Q_3$

หรือ $1\angle 15^\circ \leftarrow Q_1$

หรือ $1\angle 135^\circ \leftarrow Q_2$

ดังนั้น $z_1 z_3 + z_2^2 = 1\angle(-90^\circ) + 1\angle 270^\circ$

$= -i - i = -2i$ ตอบ

---

(68) <u>วิธีที่ 1</u> *มองเป็นเวกเตอร์ (เหมือนข้อ 39)*
เนื่องจากขนาด z_1, z_2, z_3 เป็น 1
และบวกกันเป็น 0 แสดงว่า z_1, z_2, z_3 อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย กระจายตัวเป็นมุมเท่าๆ กัน คือห่างกัน 120° ถ้าให้ $z_1 = 1\angle\theta$
จะได้ $z_2 = 1\angle(\theta+120°)$, $z_3 = 1\angle(\theta-120°)$

ข้อ ก. เนื่องจาก $\bar{z}_2 = 1\angle(-\theta-120°)$
ดังนั้น $z_1\bar{z}_2 = 1\angle(\theta+(-\theta-120°)) = 1\angle(-120°)$
$\therefore \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 1\cos(-120°)$
$= \cos 120° = -\frac{1}{2}$ เสมอ <u>ข้อ ก. ผิด</u>

ข้อ ข. ใช้สูตรผลลบเวกเตอร์ (หรือกฎของ cos)
$\left|z_1 - z_2\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos(120°)} = \sqrt{3}$
<u>ข้อ ข. ถูก</u>

<u>วิธีที่ 2</u> *ใช้สูตรค่าสัมบูรณ์ของผลบวก-ผลลบ*
นั่นคือ $\left|z_1 \pm z_2\right| = \sqrt{\left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)}$

ข้อ ก. จากโจทย์เขียนได้เป็น $z_1 + z_2 = -z_3$
ดังนั้น $\left|z_1 + z_2\right| = \left|-z_3\right| = 1$
$\Rightarrow \sqrt{1^2 + 1^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)} = 1 \quad \Rightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = -\frac{1}{2}$

ข้อ ข. อาศัยผลลัพธ์จากข้อ ก.
จะได้ $\left|z_1 - z_2\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2(-\frac{1}{2})} = \sqrt{3}$

---

(69) จากโจทย์ $z_1z_2z_3 = 1$ .....(1)
และ $z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$ .....(2)

ข้อ ก. $1 - z_1 - z_2 + z_1z_2 = 1 - \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1z_2}$
แทนค่า (1); $1 - z_1 - z_2 + \frac{1}{z_3} = 1 - \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} + z_3$
$\Rightarrow \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = z_1 + z_2 + z_3$ ตรงกับ (2)
ดังนั้น <u>ข้อ ก. ถูก</u>

ข้อ ข. นำสมการข้อ ก. ซึ่งเป็นจริง มาใช้ประโยชน์
จาก $(1 - z_1)(1 - z_2) = (1 - \frac{1}{z_1})(1 - \frac{1}{z_2})$
$= (\frac{z_1 - 1}{z_1})(\frac{z_2 - 1}{z_2}) = (z_1 - 1)(z_2 - 1)\,z_3$
ย้ายไปลบทางซ้าย ได้ $(1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3) = 0$
แต่โจทย์กำหนด $z_1, z_2 \neq 1$ ดังนั้น $z_3 = 1$
จึงได้ $\left|z_3 + i\right|\left|z_3 - i\right| = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$ <u>ข้อ ข. ผิด</u>
